Geo-Eco-Trop, 1981, 5 (4) 267- 276

SUR L'UTILISATION D'UN MODELE MATHEMATIQUE POUR L'ETUDE DE LA STRUCTURE TOTALE DE LA FORET DENSE SECHE ZAMBEZIENNE DES ENVIRONS DE LUBUMBASHI (ZAIRE)*

A mathematical model for the distribution of trees according to girth in the Zambezian dry woodland around Lubumbashi

A. SCHREIDEN** & F. MALAISSE***

ABSTRACT

The distribution of the number of trees according to girth groups has been noted for one hectare of a Zambezian dry evergreen forest. The exponential distribution seems to be unsatisfactory for mathematical adjustment, but on the other hand the $\frac{\alpha}{x^p}$ *law with one parameter (p) is adequate. This observation refines and completes the range of mathematical models for tropical forests proposed by various authors.*

RESUME

La répartition du nombre des arbres suivant des classes diamétriques a été observée pour un hectare de forêt dense sèche zambézienne. Le modèle exponentiel apparaît mal adapté pour un ajustement mathématique; par contre la loi $\frac{\alpha}{x^p}$ *à un paramètre (p) est adéquate. Cette constation nuance et complète l'éventail des modèles mathématiques proposés par divers auteurs pour les forêts tropicales.*

---

* Note 3 des Contributions à l'étude de l'écosystème forêt dense sèche (Muhulu).

** Département des Sciences de Base, Université de Lubumbashi, B.P. 1825, Lubumbashi, Zaïre.

*** Laboratoire de Botanique et d'Ecologie, Université de Lubumbashi, B.P. 3429, Lubumbashi, Zaïre.

INTRODUCTION

La méthodologie des études sur la structure de la strate arborescente des forêts varie beaucoup d'un auteur à l'autre (BOUXIN, 1977). Le concept de structure a été revu par divers auteurs, dont MALAISSE (1976) et ROLLET (1979). La structure totale d'un peuplement est, selon la définition de ROLLET & CAUSSINUS (1969), la répartition du nombre de ses arbres (toutes espèces réunies) suivant des classes diamétriques, le diamètre étant mesuré à 1,30 m du sol ou au-dessus des contreforts. Son étude implique l'établissement préalable d'inventaires forestiers. Les valeurs de ceux-ci sont peu fréquentes dans la littérature relative aux forêts denses tropicales, leurs ajustements à des modèles mathématiques étant fort rares. Il convient néanmoins de signaler les essais effectués pour les forêts de montagne du Kivu (Zaïre) et les forêts de basse altitude de la cuvette zaïroise (PIERLOT, 1966), les forêts-galeries de Lamto en Moyenne Côte d'Ivoire (DEVINEAU, 1975), les forêts denses humides sempervirentes de plaine de Guyane venézuélienne (ROLLET & CAUSSINUS, 1969; CAUSSINUS *et al.*, 1969 et CAUSSINUS & ROLLET, 1970), de Java et de Thaïlande (ROLLET, 1979), la forêt de montagne du Rwanda (BOUXIN, 1977).

Pour les approximations mathématiques on a proposé le modèle exponentiel (PIERLOT, 1966; ROLLET, 1979), le modèle hyperbolique (PIERLOT, 1966, 1968), un modèle plus complexe à deux paramètres (CAUSSINUS & ROLLET, 1970), la distribution beta (ZOHRER, 1969).

METHODE

Localisation du site de la forêt

La forêt dense sèche de la Luiswishi est située à 28 km au N.E. de Lubumbashi. Sa composition floristique a été précisée précédemment (MALAISSE *et al.*, 1970), tandis que MALAISSE & COLONVAL-ELENKOV (1981) en rappellent les principales caractéristiques écologiques.

Inventaire forestier

Un inventaire forestier prenant en considération toutes les tiges d'un diamètre égal ou supérieur à 5 cm a été réalisé sur cent ares. Il comprend un ensemble d'un seul tenant de 80 ares et vingt parcelles complémentaires par échantillonnage au dixième. Les tiges inférieures à 5 cm de diamètre ont été inventoriées sur dix ares choisis au hasard parmi les cent ares. De plus le peuplement comprend également plusieurs hautes termitières qui n'ont pas été prises en considération dans la présente étude.

RECHERCHE D'UN MODELE MATHEMATIQUE

On se propose d'examiner dans quelle mesure les effectifs des classes diamétriques (mesurées à 1,3 m de hauteur) de la forêt dense sèche de la Luiswishi sont distribués selon la loi exponentielle de densité de probabilité :

$$\lambda . e^{-\lambda x} \qquad (x \geqslant o)$$

et, plus généralement, si l'on se limite aux arbres de diamètre $\geqslant a > o$:

$$\lambda . e^{-\lambda (x - a)} \qquad (x \geqslant a)$$

Ce modèle exponentiel, par ailleurs bien connu en Physique, a déjà été proposé et utilisé par ROLLET (1970) pour diverses forêts denses humides.

A la Luiswishi, nous disposons de l'échantillon d'observations suivant :

Classes diamétriques (cm)	Effectif (pour 1 ha)	Classes diamétriques (cm)	Effectif (pour 1 ha)
0,1- 4,9	15.880	45,0-49,9	11
5,0- 9,9	860	50,0-54,9	6
10,0-14,9	197	55,0-59,9	5
15,0-19,9	106	60,0-64,9	2
20,0-24,9	61	65,0-69,9	1
25,0-29,9	37	70,0-74,9	1
30,0-34,9	26	75,0-79,9	0
35,0-39,9	19	80,0-84,9	0
40,0-44,9	11	85,0-89,9	0

En vue de notre étude, commençons par modifier légèrement ces données :

- Tout d'abord, en vue du test χ^2 qui conclura notre ajustement, lequel test nécessite des effectifs $\geqslant 5$, nous grouperons, en une classe unique, toutes les classes correspondant à un diamètre $\geqslant 55$ cm.

- D'autre part, dans une première approche, nous faisons abstraction de la première classe.

Les données se réduisent, de la sorte, à :

Classes diamétriques (cm)	Effectif	Classes diamétriques (cm)	Effectif
5,0- 9,9	860	35,0-39,9	19
10,0-14,9	197	40,0-44,9	11
15,0-19,9	106	45,0-49,9	11
20,0-24,9	61	50,0-54,9	6
25,0-29,9	37	>55,0	9
30,0-34,9	26		

Comme d'usage, et notamment comme dans ROLLET & CAUSSINUS (1969), λ sera estimé par la méthode du maximum de vraisemblance. Comme ici la dernière classe est de largeur infinie, et aussi comme les autres classes, tout en étant de même largeur, ont des effectifs fort disparates (6 à 860), l'estimation usuelle

$$\lambda = \frac{1}{\bar{x}} \quad (\text{si } a = 0) \quad \text{et, plus généralement, } \lambda = \frac{1}{\bar{x} - a} \qquad (1)$$

où $\bar{x}$ est la moyenne d'échantillon, est à déconseiller.

Tout comme dans l'article précité, où la situation était analogue, on utilisera la formule élaborée :

$$\lambda = \frac{1}{h}\, ln\left(1 + \frac{n - n_{k+1}}{n^*}\right) \qquad \text{où l'on a posé}$$

$$n^* = \sum_{i=1}^{k+1} n_i\,(i - 1)$$

Dans ces formules, $k + 1$ est le nombre de classes (ici $k = 10$), h est la largeur de chacune des k premières classes (ici $h = 5$ cm), n_i est l'effectif de la i -ième classe ($i = 1$ à $k + 1$); $n = \sum_{i=1}^{k+1} n_i$ est l'effectif total. Tout comme $n - n_{k+1}$ et n^*, il est calculé ci-contre :

$x_\pm$	i	$i-1$	n_i	$(i-1)\,n_i$	$e^{-\lambda x_\pm}$	$e^{\lambda a}\,e^{-\lambda x_\pm}$	Δ_i	$\hat{n}_i$	$n_i^2/\hat{n}_i$
5					.4922	1.0000			
	1	0	860	0			.5077	681.8	1085
10					.2423	.4923			
	2	1	197	197			.2501	335.9	116
15					.1192	.2422			
	3	2	106	212			.1229	165.1	68
20					.0587	.1193			
	4	3	61	183			.0606	81.3	46
25					.0289	.0587			
	5	4	37	148			.0298	40.1	34
30					.0142	.0289			
	6	5	26	130			.0147	19.6	34
35					.0070	.0142			
	7	6	19	114			.0073	9.8	37
40					.0034	.0069			
	8	7	11	77			.0034	4.6	26
45					.0017	.0035			
	9	8	11	88			.0019	2.5	48
50					.0008	.0016			
	10	9	6	54			.0008	1.1	33
55					.0004	.0008			
	11	10	9	90			.0008	1.1	74
∞					.0000	.0000			
$\sum$			1343	1293				1342.9	1601

Les cinq premières colonnes fourniront λ :

$$n = 1343; \quad n - n_{k+1} = 1343 - 9 = 1334; \quad n^* = 1293;$$

$$\lambda = \frac{1}{5} \ln \left(1 + \frac{1334}{1293} \right) \simeq .1418$$

Notons au passage que, en calculant $\bar{x}$ d'après les données initiales (amputées également de leur première ligne) par la formule

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_i \, x_i$ et en remplaçant dans (1), on eût obtenu $\lambda \simeq .136$

Revenons à notre grille. Les cinq colonnes restantes, à l'exception de la dernière, sont utilisées pour le calcul des effectifs estimés $\hat{n}_i$:

$\hat{n}_i = n \, \Delta_i$ où Δ_i est la probabilité de tomber dans la i-ième classe :

$$\Delta_i \equiv P \, (x_i^- \leqslant x \leqslant x_i^+) = \int_{x_i^-}^{x_i^+} \lambda \, e^{-\lambda(x - a)} \, dx = e^{\lambda a} \, (-e^{-\lambda x_i^+} + e^{-\lambda x_i^-})$$

on notera que $a = 5$; $\lambda a \simeq .7089$; $e^{\lambda a} = 1 + \frac{1334}{1293} \simeq 2.0317$

Enfin la dernière colonne nous donne le score χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_i \frac{n_i^2}{\hat{n}_i} - n = 1601 - 1343 = 258$$

Un examen des tables du χ^2, pour $11 - 1 = 10$ degrés de liberté, montre que les quantiles de .9, .95, .975 et même .99 sont bien inférieurs à ce score. En conclusion, la loi exponentielle apparaît comme fort mal adaptée à l'étude des forêts denses sèches zambiennes. Cette inadéquation est au moins aussi mauvaise que pour les forêts de Guyane vénézuélienne (ROLLET & CAUSSINUS, 1969).

D'autre part, les observations dont nous disposons pour la forêt dense sèche de la Luiswishi présentent certaines caractéristiques intéressantes :

- décroissance des effectifs en fonction du diamètre;
- très grands effectifs pour les petits diamètres;
- effectifs très faibles (ou nuls) pour les grands diamètres.

Ces caractéristiques militent plutôt en faveur d'une densité de la forme $\frac{\alpha}{x^p}$ pour $x \in \{a, A\}$ où α et p sont > o, tandis que a et A, tels que $o < a < A$, sont respectivement la borne inférieure de la classe inférieure, et la borne supérieure de la classe supérieure. α n'est pas un paramètre, car on peut l'exprimer en fonction de $\hat{n}$, a et A si l'on note que $\int_a^A \frac{\alpha}{x^p} dx = 1$:

$$1 = \int_a^A \frac{\alpha}{x^p} dx = \frac{\alpha}{p - 1} (a^{1-p} - A^{1-p}) \qquad (p \neq 1)$$

$$\text{d'où } \alpha = \frac{p - 1}{a^{1-p} - A^{1-p}} \qquad (p \neq 1) \quad (2)$$

On notera au passage que A pourrait fort bien être ∞, à condition que $p > 1$. Ensuite, on peut relier p à $\bar{x}$ si l'on note que

$$\int_a^A x \frac{\alpha}{x^p} dx = \bar{x} :$$

$$\bar{x} = \int_a^A \frac{\alpha}{x^{p-1}} dx = \frac{\alpha}{p - 2} (a^{2-p} - A^{2-p}) \qquad (p \neq 2) \quad (3)$$

de sorte que, si $p \neq 1$ et 2 :

$$\bar{x} = \frac{p - 1}{p - 2} \frac{a^{2-p} - A^{2-p}}{a^{1-p} - A^{1-p}} \qquad (4)$$

Soulignons que, si p = 1 ou 2, les formules (2), (3) et (4) se modifient car il apparaît des *ln*. Nous n'en dirons pas plus sur ces deux cas qui en fait ont été envisagés, mais n'ont pas fourni les résultats escomptés. Ceci dit, le calcul de $\bar{x}$ par la formule classique

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_i x_i \text{ fournit } \bar{x} = 12.34.$$

Remplaçant dans (4), on obtient une équation transcendante en p. En résolvant par approximation successives, on obtient $p \simeq 2.32$. La probabilité de tomber dans la classe $]x_{i-}, x_{i+}]$ est évidemment

$$\int_{x_{i-}}^{x_{i+}} \frac{\alpha}{x^p} dx = \frac{\alpha}{p - 1} (x_{i-}^{1-p} - x_{i+}^{1+p})$$

$$= \frac{x_{i-}^{1-p} - x_{i+}^{1-p}}{a^{1-p} - A^{1-p}} \quad \text{d'où } \hat{n}_i = n\,\frac{x_{i-}^{1-p} - x_{i+}^{1-p}}{a^{1-p} - A^{1-p}}$$

Les calculs de $\bar{x}$, des $\hat{n}_i$, et enfin de $\chi^2 = \sum_i \frac{n_i^2}{\hat{n}_i} - n$ sont résumés sur la grille. Soulignons que, ici, a = 5, A = 75, $a^{1-p} - A^{1-p}$ = .11615 et que, pour le χ^2, on a encore regroupé les quatre dernières classes. On trouve : $\chi^2 \simeq 1355 - 1343 = 12$, résultat inférieur aux quantiles usuels de χ^2 pour 10 degrés de liberté.

x_i	n_i	$n_i . x_i$	x_i^{1-p}	$\frac{x_i^{1-p}}{a^{1-p} - A^{1-p}}$	Δ_i	$\hat{n}_i$	$\frac{n_i^2}{\hat{n}_i}$
5			.1195	1.0288			
7.5	860	6450			.6167	828.2	893.0
10			.0479	.4121			
12.5	197	2462.5			.1708	229.4	169.2
15			.0280	.2413			
17.5	106	1855			.0762	102.3	109.8
20			.0192	.1651			
22.5	61	1372.5			.0422	56.7	65.6
25			.0143	.1229			
27.5	37	1017.5			.0263	35.3	37.8
30			.0112	.0966			
32.5	26	845			.0177	23.8	28.4
35			.0092	.0789			
37.5	19	712.5			.0128	17.2	21.0
40			.0077	.0661			
42.5	11	467.5			.0095	12.8	9.5
45			.0066	.0566			
47.5	11	522.5			.0074	9.9	12.2
50			.0057	.0492			
52.5	6	315			.0058	7.8	4.6
55			.0050	.0439			
57.5	5	287.5			.0047	6.3	
60			.0045	.0387			
62.5	2	125			.0039	5.2	
65			.0040	.0348			4.2
67.5	1	67.5			.0032	4.3	
70			.0037	.0316			
72.5	1	72.5			.0028	3.7	
75			.0033	.0288			
$\sum$	1343	16572.5				1342.9	1355.3

D'où l'on conclut au caractère adéquat de la loi à un paramètre :

$$\frac{\alpha}{x^p} \equiv \frac{p-1}{a^{1-p} - A^{1-p}} \; \frac{1}{x^p} \quad (a \leqslant x \leqslant A;\ p \neq 1,2)$$

Notons que le calcul de p a été ici quelque peu simplifié. Il est évident que si p était estimé de façon plus précise (par exemple par la méthode du maximum de vraisemblance) on ne pourrait qu'aboutir à des résultats plus concluants encore.

REMERCIEMENTS

Monsieur le Professeur G. SCHOROCHOFF a discuté avec l'un de nous d'un premier projet de cette note. Nous l'en remercions vivement.

BIBLIOGRAPHIE

BOUXIN, G., 1977. Structure de la strate arborescente dans un site de la forêt de montagne du Rwanda (Afrique centrale). *Vegetatio*, 33, 2-3, 65-78.

CAUSSINUS, H., LAMBERT, E. & ROLLET, B., 1969. Sur l'utilisation d'un nouveau modèle mathématique pour l'étude des structures des forêts denses humides sempervirentes de plaine. *C. R. Acad. Sc. Paris*, Série D, 269, 2547-2549.

CAUSSINUS, H. & ROLLET, B., 1970. Sur l'analyse, au moyen d'un modèle mathématique, des structures par espèces des forêts denses humide sempervirentes de plaine. *C. R. Acad. Sc. Paris*, Série D, 270, 1341-1344.

DEVINEAU, J., 1975. Etude quantitative des forêts-galeries de Lamto (moyenne Côte d'Ivoire). Thèse 3e cycle, Univ. Paris-VI, 190 p.

MALAISSE, F., 1976. Quelques méthodes d'étude de la structure en forêt. Exemple d'application au miombo zaïrois, écosystème forestier tropical. In : *La pratique de l'écologie. Méthodes écologiques d'étude du paysage et de la nature*. Adm. Gén. Coop. Dév. (A.G.C.D.), Bruxelles, 104-118.

MALAISSE, F. & COLONVAL-ELENKOV, E., 1981. Ecomorphologie et anatomie des feuilles des forêts denses sèches zambéziennes. *Bull. Soc. Roy. Bot. Belgique*, 114, 2, 209-228.

MALAISSE, F., MALAISSE-MOUSSET, M. & BULAIMU, J., 1970. Contribution à l'étude de l'écosystème forêt dense sèche (Muhulu). Note 1 : Phénologie de la défoliation. *Trav. Serv. Sylv. Pisc. Univ. off. Congo, Lubumbashi*, 7, 1-11.

PIERLOT, R., 1966. Structure et composition des forêts denses d'Afrique centrale, spécialement celles du Kivu. *Ac. Roy. Sc. Outre-Mer*, Cl. Sc. Nat. & Méd., N.S., 16, 363 p.

PIERLOT, R., 1968. Une technique d'étude de la forêt dense en vue de son aménagement : la distribution hyperbolique des grosseurs. *Bull. Soc. Roy. For. Belgique*, 75, 122-130.

ROLLET, B., 1979. Application de diverses méthodes d'analyse de données à des inventaires forestiers détaillés levés en forêt tropicale. *Oecol. Plant.*, 14, 3, 319-344.

ROLLET, B. & CAUSSINUS, H., 1969. Sur l'utilisation d'un modèle mathématique pour l'étude des structures des forêts denses humides sempervirentes de plaine. *C. R. Acad. Sc. Paris*, Série D, 268, 1853-1855.

ZÖHRER, F., 1969. The application of the Beta-function for best fit of stem-diameter-distribution in inventories of tropical forests. IUFRO, Sect. 25, Reinbek. In : Mitt. BFA f. Forst- und Holzwirtschaft Reinbek bei Hamburg, 74, 279-293.